| | |
|---|---|
| SAINT MICHEL DE PICPUS ENSEMBLE SCOLAIRE | CONTRÔLE N$^{\text{o}}$ 5<br>Mardi 16 janvier 2024<br>Option maths expertes, Terminales 9 et 10 |

**EXERCICE 1.**

Dans le plan complexe $(\mathcal{P})$ muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 4 cm, on considère le point A d'affixe $a=-1$ et l'application $f$, du plan $(\mathcal{P})$ dans lui · même, qui au point $M$ d'affixe $z$, distinct de A, associe le point $M'=f(M)$ d'affixe $z'$ tel que $z'=\dfrac{\mathrm{i}z}{z+1}$

① Déterminer l'affixe des points $M$ tels que $M'=M$.

② Démontrer que pour tout point $M$ distinct de A et de O, on a : $\mathrm{O}M'=\dfrac{\mathrm{O}M}{\mathrm{A}M}$ et $\left(\vec{u},\ \overrightarrow{\mathrm{O}M'}\right)\equiv\left(\overrightarrow{M\mathrm{A}},\ \overrightarrow{M\mathrm{O}}\right)+\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

③ *a)* Soit B le point d'affixe $b=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}$.
Placer dans le repère le point B et la médiatrice $(\Delta)$ du segment [OA].

*b)* Calculer sous forme algébrique l'affixe $b'$ du point B$'$ image du point B par $f$.
Établir que B$'$ appartient au cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon 1.
Placer le point B$'$ et tracer le cercle $(\mathcal{C})$ dans le repère.

*c)* En utilisant la question 2, démontrer que, si un point $M$ appartient à la médiatrice $(\Delta)$, son image $M'$ par $f$ appartient au cercle $(\mathcal{C})$.

*d)* Soit C le point tel que le triangle AOC soit équilatéral direct.
En s'aidant des résultats de la question 2, construire, à la règle et au compas, l'image du point C par $f$ (On laissera apparents les traits de construction.)

④ On se propose de déterminer, par deux méthodes différentes, l'ensemble $(\Gamma)$ des points $M$ distincts de A et de O dont l'image $M'$ par $f$ appartient à l'axe des abscisses.

*a)* On pose $z=x+\mathrm{i}y$ avec $x$ et $y$ réels tels que $(x,\ y)\neq(-1,\ 0)$ et $(x,\ y)\neq(0,\ 0)$.
Démontrer que la partie imaginaire de $z'$ est égale à : $\operatorname{Im}(z')=\dfrac{x^2+y^2+x}{(x+1)^2+y^2}$
En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble $(\Gamma)$ et le tracer.

*b)* À l'aide de la question 2, retrouver géométriquement la nature de l'ensemble $(\Gamma)$.

**EXERCICE 2.** Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique : 2 cm.

On appelle $(\Gamma)$ le cercle de centre O et de rayon 1.

*On fera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.*

On appelle $F$ l'application du plan $\mathcal{P}$ privé du point O dans $\mathcal{P}$ qui, à tout point $M$ différent de O, d'affixe $z$, associe le point $M' = F(M)$ d'affixe $z'$ définie par :

$$z' = z + \mathrm{i} - \frac{1}{z}.$$

① On considère les points A et B d'affixes respectives $a = \mathrm{i}$ et $b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ et leurs images A′ et B′ par $F$ d'affixes respectives $a'$ et $b'$.

*a)* Calculer $a'$ et représenter A et A′.

*b)* Calculer $b'$.

*c)* Montrer que B appartient à $(\Gamma)$. Mettre $B$ sous forme algébrique.
Représenter B à l'aide de $(\Gamma)$ puis B′.

*d)* Démontrer que $\dfrac{-b}{b' - b} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$.

*e)* En déduire la nature du triangle OBB′.

② On recherche l'ensemble (E) des points du plan $\mathcal{P}$ privé du point O qui ont pour image par $F$, le point O.

*a)* Démontrer que, pour tout nombre complexe $z$,

$$z^2 + \mathrm{i}z - 1 = \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right).$$

*b)* En déduire les affixes des points de l'ensemble (E).

*c)* Démontrer que les points de (E) appartiennent à $(\Gamma)$.

③ Soit $\theta$ un réel.

*a)* Démontrer que si $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ alors $z' = (2\sin\theta + 1)\mathrm{i}$.

*b)* En déduire que si $M$ appartient au cercle $(\Gamma)$ alors $M'$ appartient au segment [A′C] où C a pour affixe $-\mathrm{i}$.

*c)* Justifier que si $y$ est un réel tel que $-1 \leq y \leq 3$, il existe $\theta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ tel que $y = 2\sin(\theta) + 1$. En déduire que l'image du cercle $(\Gamma)$ par l'application $F$ est le segment [A′C].